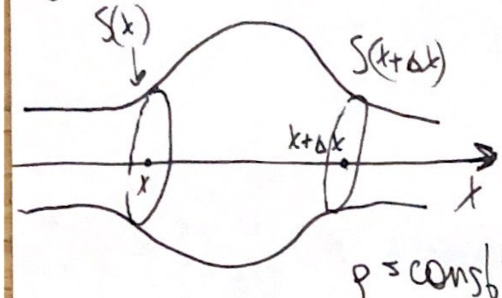
Одномерные ур-я теч-я ~~вяз~~ вязкой жидкости в круглых трубках



Теч-е Пуазейля зависит от r и z. Здесь будем учитывать зав-ть только от x

μ-коэф-т I вязкости, либо $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - кинематич. вяз-ть

$\rho = const$ (жидкость несжим-я); $S(t,x), \rho(t,x); v(t,x)$ - неизв.

З-н сохр-я массы

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho\left(S(t+\Delta t,\xi) - S(t,\xi)\right) d\xi$$ изм-е масс за время Δt на выдел. длине трубы

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho S(t, x+\Delta x) v(t, x+\Delta x)\, dt$$ в $x+\Delta x$ (вытекло)

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho S(t,x) v(t,x)\, dt$$ в x (втекло)

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho\left(S(t+\Delta t,\xi) - S(t,\xi)\right) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \rho S v \Big|_x^{x+\Delta x} dt = 0$$

$$\Delta x\left(S(t+\Delta t, x^*) - S(t, x^*)\right) + \Delta t\left(S(t^*, x+\Delta x) v(t^*, x+\Delta x) - S(t^*, x) v(t^*, x)\right) = 0$$

$\Delta x, \Delta t \to 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(S v) = 0$

Ур-е дв-я: $$\int_x^{x+\Delta x} \rho\left(S(t+\Delta t,\xi) v(t+\Delta t,\xi) - S(t,\xi) v(t,\xi)\right) d\xi$$ - изм-е колич. дв-я за время Δt на выдел. участке трубы

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho\left(S(t,x+\Delta x) v^2(t,x+\Delta x) - S(t,x) v^2(t,x)\right) dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left(p(t,x+\Delta x) S(t,x+\Delta x) - p(t,x) S(t,x)\right) dt + \int_t^{t+\Delta t} dt \int_x^{x+\Delta x} F\, dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(SV)+\frac{\partial}{\partial x}(SV^2)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(pS)=-\frac{F}{\rho}$$

$$S\frac{\partial V}{\partial t}+\underbrace{V\frac{\partial S}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}(SV)}_{=0 \text{ из 1-го ур-я}}+SV\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(pS)=-\frac{F}{\rho}$$

$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\rho S}\frac{\partial}{\partial x}(pS)=-\frac{F}{\rho S}$; можно док-ть, что $\frac{\partial}{\partial x}(pS)=S\frac{\partial p}{\partial x}$

$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{F}{S\rho}$; Теч-е Пуазейля: $V=-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(R^2-r^2)$; $Q,$ [illegible]

$Q=-\frac{\pi}{8\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot R^4$; $\langle V\rangle=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{R^2}{8\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{R^2}{8\mu}\cdot\frac{\Delta p}{l}$;

$p_{rx}=\mu\left(\frac{\partial V_r}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)=\mu\frac{\partial V_x}{\partial r}=\mu\left(\frac{1}{4\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot 2r\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}r$;

$F=2\pi r\,p_{rx}=\frac{\partial p}{\partial x}r^2\pi\Big|_{r=R}=\pi R^2\frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{8\mu}{R^2}\langle V\rangle \Rightarrow F=\frac{8\mu}{R^2}\langle V\rangle\pi R^2=$

$=8\pi\mu\langle V\rangle \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{8\pi\mu\langle V\rangle}{S\rho}=-\frac{8\pi\nu\langle V\rangle}{S}=-\frac{8\pi\nu Q}{S^2}$

$\langle V\rangle=V$

Пример: рассм. стац-ое теч-е $S=\text{const}=S_0$

$p(0,t)=p_0$; $p(l,t)=p_1$; Найдём $V, p \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial x}=0\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{8\pi\nu V}{S}\ (S=S_0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}V=V_0\\ \frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{8\pi\nu\rho V}{S_0}=-\frac{8\pi\nu\rho V_0}{S_0}\end{cases}$$

$\Rightarrow p=-\frac{8\pi\nu\rho V_0}{S_0}x+A$

$p(0,t)=A=p_0$

$\Rightarrow p(l,t)=-\frac{8\pi\nu\rho V_0}{S_0}+p_0=p_1 \Rightarrow \frac{p_0-p_1}{8\pi\nu\rho}S_0=V_0$

$p=-\frac{8\pi\nu\rho V_0}{S_0}x+p_0$